



ORDNUNGS- UND LÖSUNGSMETHODE FÜR DIE SIMULTANAUSGLEICHUNG GROSSER PHOTOGRAMMETRISCH-GEODÄTISCHER NETZE

ORDERING AND SOLUTION OF LARGE NORMAL EQUATION SYSTEMS FOR SIMULTANEOUS GEODETIC AND PHOTOGRAMMETRIC ADJUSTMENT

Erwin Kruck
Institute for Photogrammetry and Engineering Surveys
University of Hannover
Federal Republic of Germany
Commission III

ABSTRACT

A simultaneous adjustment of geodetic and photogrammetric measurements will be necessary, when high accuracy and good reliability of results is required. For large blocks with 5 000 or more unknowns the calculation expense will enlarge deterrently, because the number of non-zero-elements will increase immensely during factorization. Using the graph-theory a new method has been developed for ordering the sequence of unknowns in the adjustment. The fill-in of new elements in the normal equation-matrix is reduced considerably. In connection with a direct Cholesky-solution the profile storage scheme - proposed by Jennings 1966 - will be used. Important parts of the inverse normal-equation-matrix can be computed easily, thus even for large blocks numerical proportions about accuracy, correlation and reliability may be calculated. The new method is very efficient particularly when it is implemented on computers with special hardware components for quick vector-handling and -processing.

1. Einführung

Für viele Anwendungen der Photogrammetrie ist eine gemeinsame Ausgleichung geodätischer und photogrammetrischer Meßinformationen wichtig. Die Gründe dafür können sehr unterschiedlich sein: Bei der photogrammetrischen Erfassung kleinerer Objekte in der Architektur oder Denkmalpflege soll aus Kostengründen eine aufwendige Paßpunktbestimmung vermieden werden. In diesen Fällen bietet sich eine Bündelorientierung mit Hilfe einiger weniger Meßinformationen aus dem Objektraum an (Wester-Ebbinghaus 1984). Bei Ingenieur Anwendungen dagegen wird die gemeinsame Ausgleichung wegen der besseren Genauigkeit und der höheren inneren Zuverlässigkeit gewünscht. Insbesondere, wenn die Paßpunkte durch Polygonzüge bestimmt werden, verbessert die gemeinsame Ausgleichung die Kontrollierbarkeit der geodätischen Meßwerte erheblich.

Der Formulierung eines funktionalen Modells sind dabei kaum Grenzen gesetzt. Neben den üblichen geodätischen Meßwerten wie Richtungen, Azimute, Zenitdistanzen, Strecken und Koordinatenunterschiede können Beobachtungen und Bedingungen der Bildorientierungen herangezogen werden, wie sie z.B. bei Aufnahmen mit Phototheodoliten auf bekannten Standpunkten oder mit eingespielten Libellen oder bei Aufnahmen mit Stereomeßkammern gegeben sind. Weiter können Orientierungsunterschiede in die Ausgleichung einbezogen werden, wenn z.B. Stoskopdaten einer Befliegung vorliegen. In anderen Fällen ist der Ansatz von Linien- oder Flächenbedingungen zwischen den Punkten im Objektraum sinnvoll. Die Einbeziehung dieser oder weiterer Funktionen in ein Computer-Programm stellt an sich kein Problem dar. Für einige wenige hundert Unbekannte ist auch die Auflösung des bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate entstehenden Normalgleichungssystems unkritisch. Bis zu etwa 200 Unbekannten kann die Normalgleichung $\mathbf{N} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}$ durch Inversion von \mathbf{N} gelöst werden. Bei Ausnutzung der Symmetrie von \mathbf{N} sind dazu etwa 4 000 000 Multiplikationen erforder-

derlich. Selbst ein langsamer Kleinrechner wird diese Rechenleistung in weniger als 10 Minuten erbringen. Für die Inversion eines Blockes mit 10 000 Unbekannten dagegen sind 500 000 000 000 Multiplikationen notwendig. Dafür braucht selbst ein schneller Supercomputer gut eine Woche CPU-Zeit, so daß eine Lösung auf diesem Wege völlig ausgeschlossen ist.

2. Rekursive Partitionierung

Mit der rekursiven Partitionierung und dem im Prinzip identischen Boltz'schen Entwicklungsverfahren sind Methoden der Gleichungslösung für große Bündelblöcke gegeben, die den Rechenaufwand je nach Blockgröße und -struktur auf 1/1000 oder weniger reduzieren. Diese Methoden nutzen die besonderen Strukturen photogrammetrischer Normalgleichungsmatrizen aus, die gegeben sind, wenn außer den Bildmessungen nur Paßpunkte oder andere direkte Beobachtungen von Unbekannten in die Ausgleichung einbezogen werden (Abb.1).

Bei der Auflösung des Gleichungssystems (Faktorisierung) entstehen neue von Null verschiedene Elemente in der Matrix (Fill-In), die in der Teilmatrix der Bildunbekannten C_{22} die für photogrammetrische Blöcke typische Bandstruktur erzeugen. Die in Abb.2 gezeigte Struktur der faktorisierten Matrix kann mit Hilfe der rekursiven Partitionierung /D.C.Brown 1958, H.R.Schwarz 1980/ außerordentlich günstig berechnet werden, solange die Bandbreite in der Teilmatrix C_{22} der Bildunbekannten nicht zu groß wird /E.Kruck 1983/.

Geodätische Messungen zwischen den Punkunbekannten stören die Diagonalstruktur der Teilmatrix N_{11} der Punkunbekannten (Abb.3) und bei der Faktorisierung nimmt die Anzahl der neu entstehenden Nicht-Null-Elemente sehr stark zu. Bereits wenige geodätische Messungen können ausreichen, die Teilmatrix der Bildunbekannten vollständig aufzufüllen (Abb.4). Art und Umfang des Auffüllens sind dabei nicht von der Methode der Gleichungslösung sondern nur von der Struktur der Matrix abhängig. Das Fill-In kann daher bei vorgegebenen Verknüpfungen nur durch die Reihenfolge der Unbekannten in der Normalgleichung beeinflußt werden. Die gebräuchliche Methode, diejenigen Punkunbekannten, die von geodätischen Messungen berührt sind, am Ende der Teilmatrix N_{11} zusammenzufassen /K.Wong 1972, G.Hell 1979/, verändert jedoch das Fill-In nicht. Es wird lediglich eine bessere Speicherorganisation ermöglicht, da die Diagonalstruktur von N_{11} teilweise wiederhergestellt ist.

Nach Ansicht des Verfassers kann diese Methode wegen des starken Fill-Ins für gemeinsame Ausgleichungen photogrammetrischer und geodätischer Messungen nur bis zu etwa 2000 Unbekannten genutzt werden. Bei größeren Blöcken wird insbesondere die Berechnung der wichtigsten Teile der Inversen von N kaum noch möglich sein.

3. Neu entwickelte Methode

Hier wird nun eine neu entwickelte Methode vorgestellt /Kruck 1983/, bei der durch die Aufhebung der starren Trennung zwischen Punkt- und Bildunbekannten das Fill-In verringert werden konnte (Abb.5 u.6). Der Fill-In-Faktor quantifiziert das Fill-In und ist definiert als Quotient aus der Anzahl der Nicht-Null-Elemente nach der Faktorisierung und der Anzahl der Nicht-Null-Elemente vor der Faktorisierung. Da das Quadrat des Fill-In-Faktors proportional zum Rechenaufwand ist, kann von einer erheblichen Einsparung gesprochen werden.

Grundlage zur Entwicklung und Untersuchung der neuen Methode ist die Graphentheorie. Sie stellt Gesetze zur Ordnung von Netzen und zur Untersuchung des Fill-Ins bereit /F.Harary 1974/. Die Punkte und Bilder stellen hier die Knoten dar, und die Messungen, die die Punkte untereinander oder mit den Bildern verbinden, sind die Graphen.

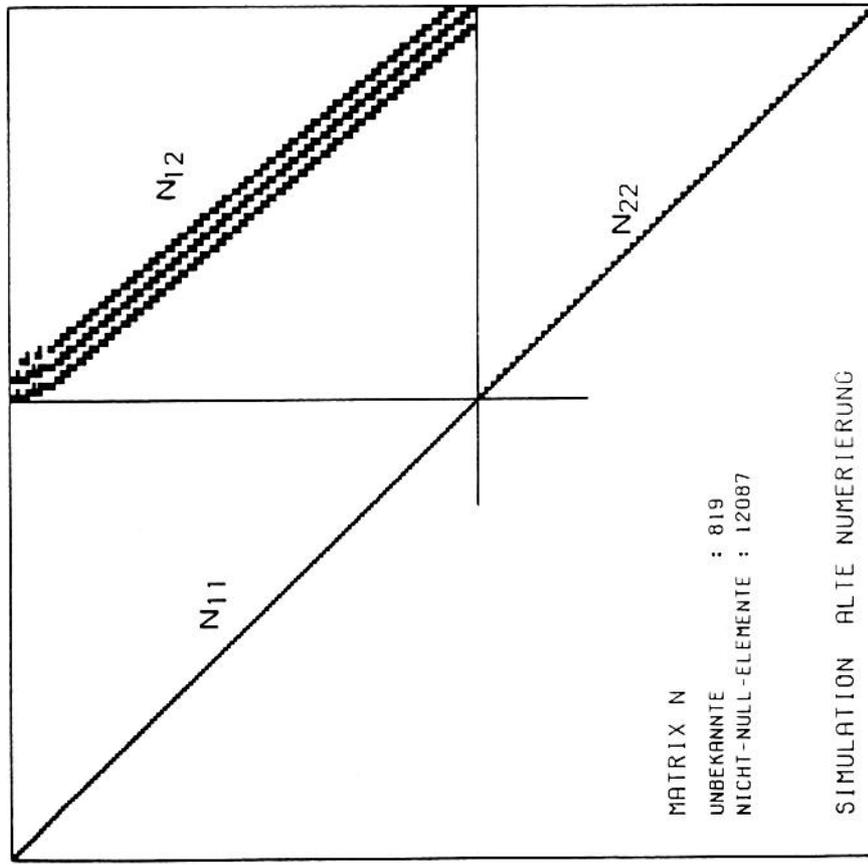
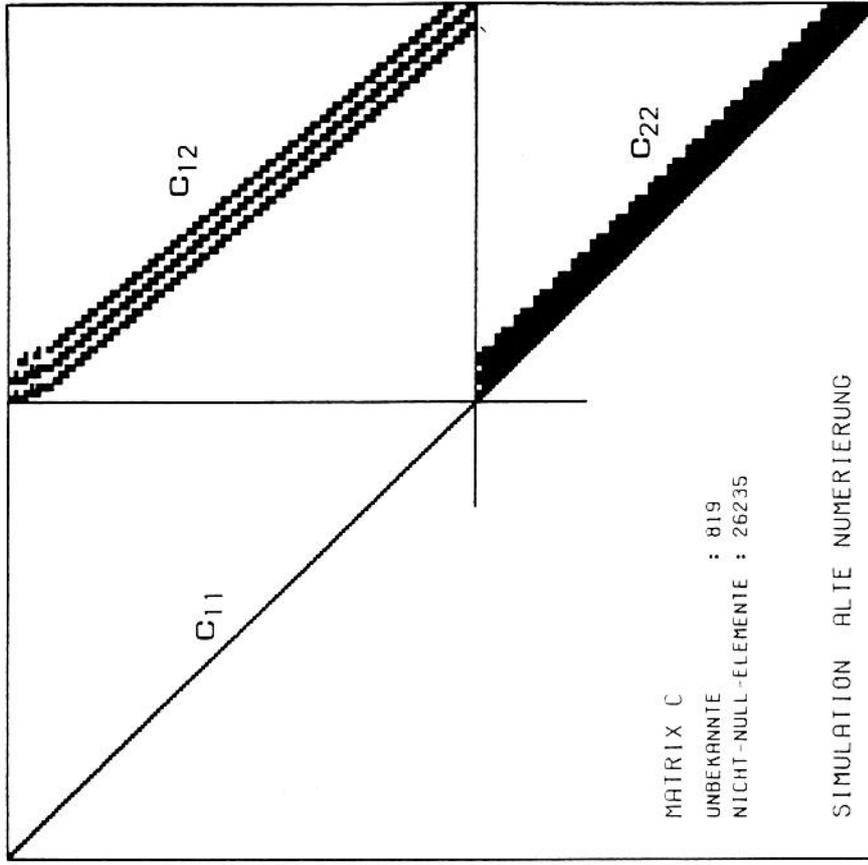


Abb.2: Faktorierte Matrix zu Abbildung 1.
 Fill-In-Faktor: 2.17

Abb.1: Normalgleichungsmatrix für einen Bündelblock mit
 3 x 21 Bildern, 20 % Quer- und 60 % Längsüber-
 deckung

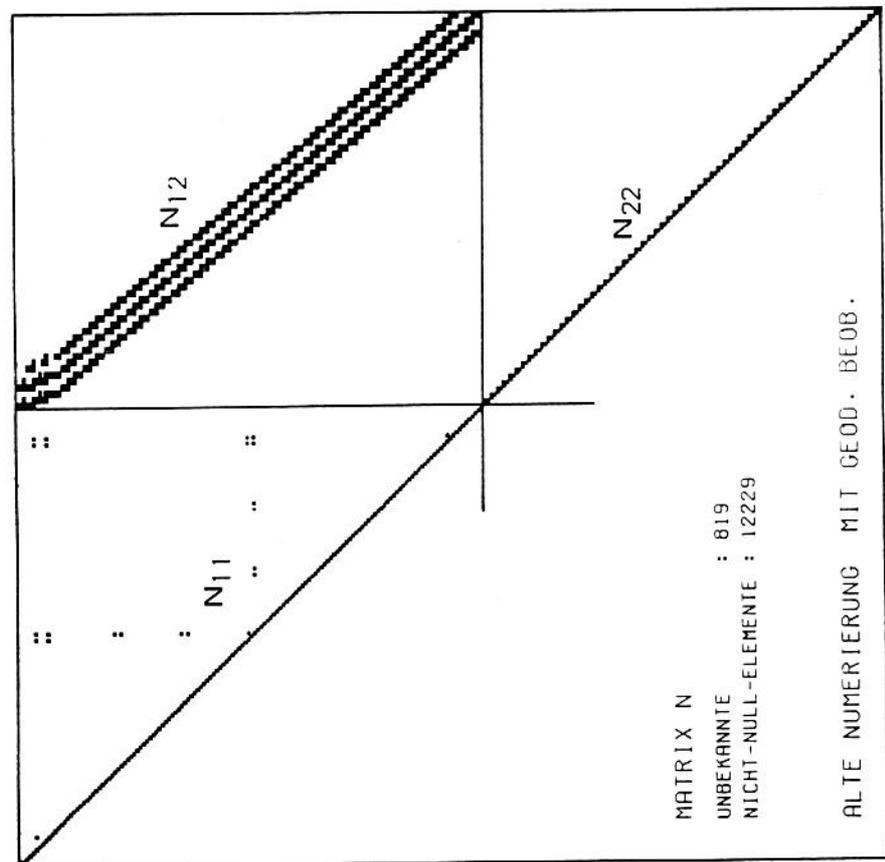
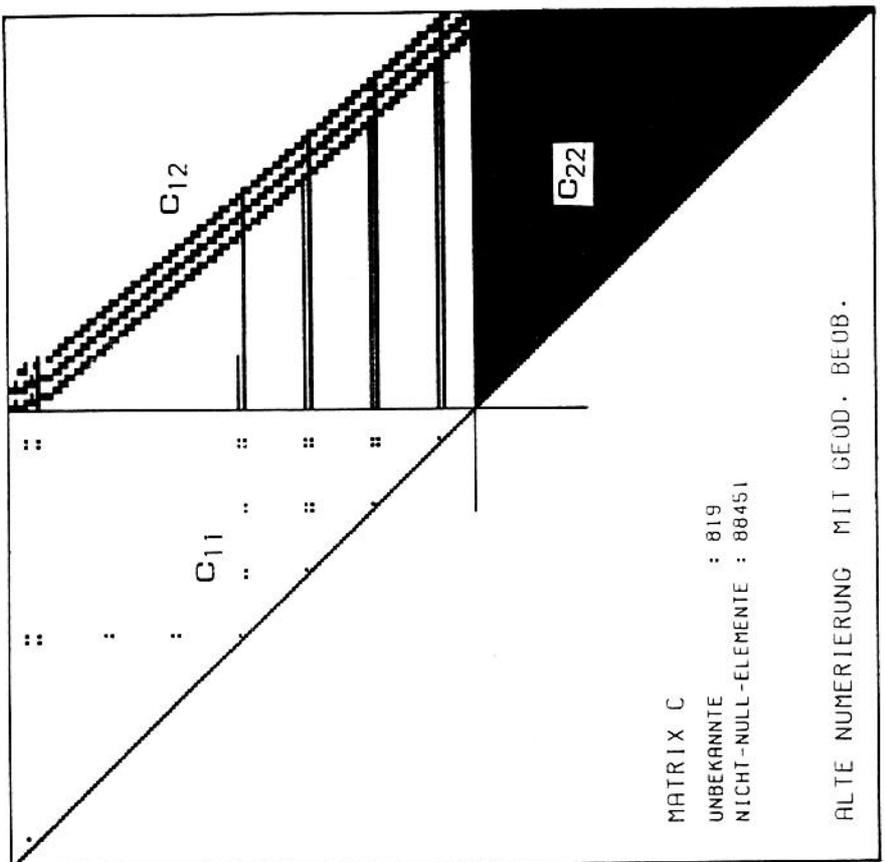


Abb.4: Faktorisierte Matrix zu Abbildung 3. Die Bandbreite der Matrix C_{12} wird auf C_{22} projiziert. Fill-In-Faktor: 7.23

Abb.3: Wie Abbildung 1, jedoch zusätzlich mit einem Richtungssatz und 16 Strecken. Die Orientierungsunbekannte des Richtungssatzes ist vorab eliminiert worden.

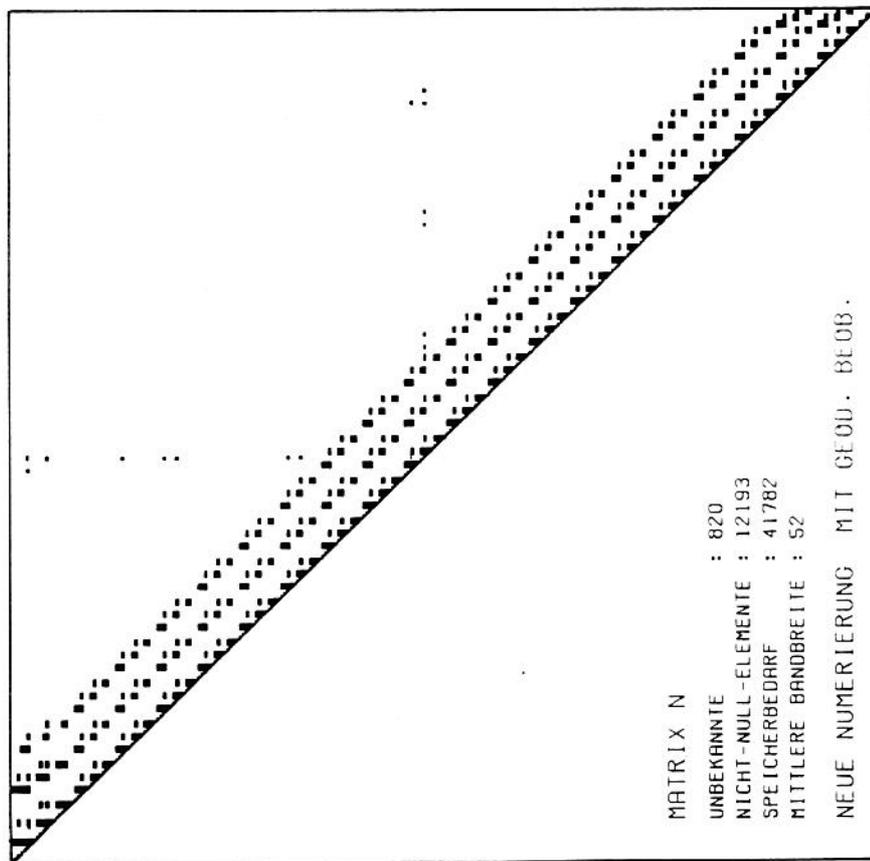
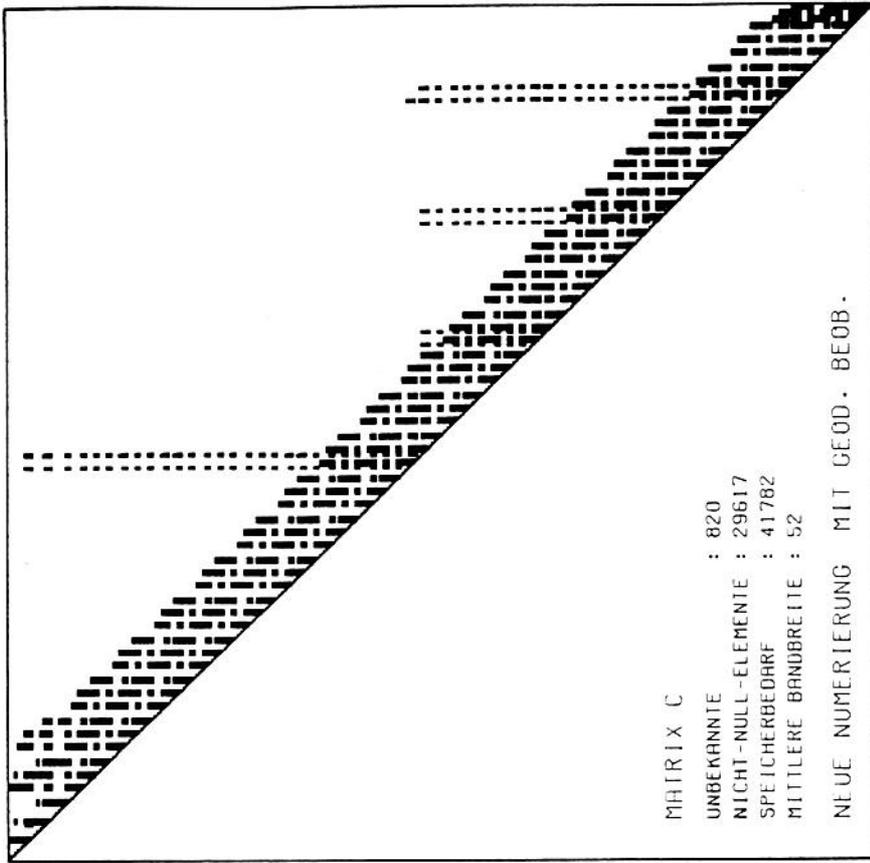


Abb.6: Faktorierte Matrix zu Abbildung 5.
 Fill-In-Faktor: 2.43

Abb.5: Neu strukturierte Normalgleichungsmatrix mit denselben geodätischen Messungen wie in Abbildung 3. Die Orientierung des Richtungssatzes wird als Unbekannte mitgeführt.

Der Grad eines Knotens gibt die Anzahl der Verknüpfungen an. Für die Entstehung neuer Elemente während der Faktorisierung gilt dabei folgende Regel (Fill-In-Regel):

Wird ein Knoten reduziert, so entstehen neue Graphen zwischen allen Knoten, die mit dem reduzierten Knoten durch einen Graphen verbunden sind.

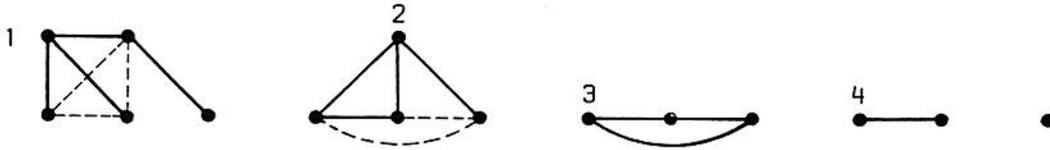
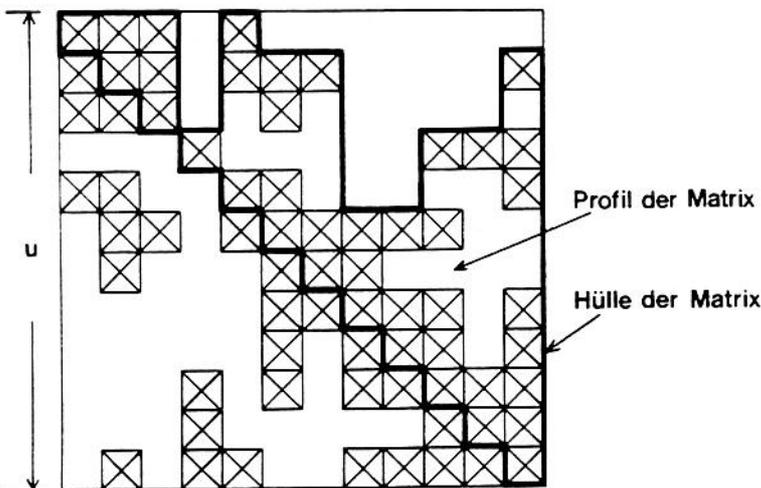


Abb.7: Reduktionsstufen eines Graphen

Aus dieser Regel kann unmittelbar der Schluß gezogen werden, daß bei der Faktorisierung ein Fill-In in einer Spalte nur unterhalb eines von Null verschiedenen Elementes erfolgen kann. Daher bietet sich zur Speicherung von Matrizen, die eine Besetzung hauptsächlich in der Nähe der Diagonalen aufweisen das Speicherschema von Jennings an, wenn eine Faktorisierung erfolgen soll.

3.1 Speicherschema nach Jennings

Bei dieser Speichermethode, die auch Profilspeichertechnik oder lineare Spaltenspeicherung genannt wird, werden von jeder Spalte alle Elemente vom ersten Nicht-Null-Element bis zur Diagonalen hintereinander in einem Vektor gespeichert, unabhängig davon, ob diese Elemente einen Wert gleich oder ungleich Null haben /A.Jennings 1966, J.Le Menestrel 1969, G.Schmitt 1973, H.R.Schwarz 1980/.



$$a_1 = 1$$

$$a_j = a_{j-1} - p_j + j + 1 \quad (1)$$

$$p_j = a_{j-1} - a_j + j + 1 \quad (2)$$

$$P = u + \sum_{j=1}^u (j - p_j) \quad (3)$$

Abb.8: Profil und Hülle einer symmetrischen Matrix

Die Elemente der gespeicherten Spalten bilden das Profil P der Matrix (3) und werden von der Hülle der Matrix umschlossen (Abb.8). Abbildung 9 zeigt die Speicherbelegung für die Matrix in Abb.8. Zur Verwaltung der Matrix wird ein Profilvektor \mathbf{p} aufgebaut, der für jede Spalte die Zeilennummer des ersten gespeicherten Elements angibt (2). Der Zugriff auf die Matrixelemente ist mit einem Adressvektor \mathbf{a} möglich, der die Adressen der Diagonalelemente der Matrix enthält. Profil- und Adressvektor können ineinander überführt werden; daher ist nur ein Vektor zu speichern (1),(2).

Im Gegensatz zu den reinen Sparse-Speichertechniken wird hier eine Anzahl von Null-elementen mit gespeichert. Damit wird jedoch der Nachteil der anderen Sparse-Techniken vermieden, bei denen bei der Faktorisierung neu entstehende Elemente nur mit erheb-

j:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p:	1	1	1	4	1	2	2	6	6	4	4	2
a:	1	3	6	7	12	17	23	26	30	37	45	56

Spaltennummer
 Profilvektor
 Adreßvektor

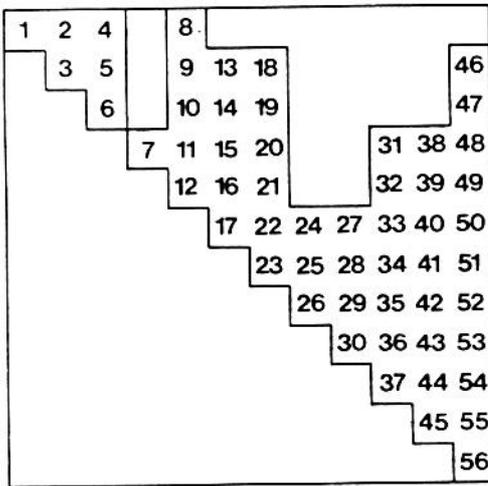


Abb.9: Speicherbelegung

mittlere Bandbreite b definiert, die die Diagonale einschließt. Aus Abbildung 10 läßt sich direkt Gleichung (4) ablesen. Nach b aufgelöst folgt (5). Die Anzahl der notwendigen Multiplikationen läßt sich dann sehr gut nach (6) abschätzen. Ist $b \ll u$, gehen (5) und (6) in (7) und (8) über.

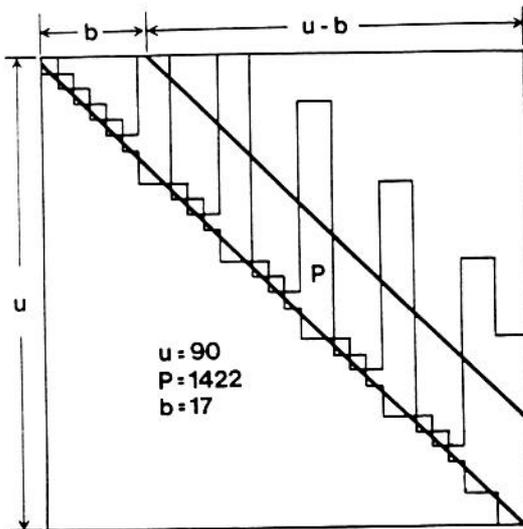


Abb.10: Mittlere Bandbreite b

Anders als bei der rekursiven Partitionierung werden hier auch Operationen mit Null-Elementen ausgeführt. Dies wirkt sich jedoch nicht nachteilig auf die Rechenzeit aus, da andererseits nur wenige Indexoperationen erforderlich sind und stets lange Vektoren verarbeitet werden. Über gleiche Erfahrungen mit dieser Verarbeitungsmethode berichtet auch A.George /1977/.

lichem Aufwand in die Matrix eingefügt werden können. Hier ist der Speicherplatz für alle neuen Elemente bereits reserviert, da ein Fill-In nur innerhalb der Hülle der Matrix erfolgen kann. Ist die Matrix größer als der zur Verfügung stehende Kernspeicher, wird eine Anzahl von Spalten zu einem Block zusammengefaßt und auf einem Externspeicher abgelegt. Wegen der spaltenorientierten Speichertechnik bietet sich zur Gleichungslösung eine direkt Cholesky-Faktorisierung an, bei der spaltenweise jedes neue Matrixelement als Linearkombination zweier Spaltenanteile berechnet wird.

Zur Abschätzung des Rechenaufwandes für die Faktorisierung nach $C^T \cdot C = N$ wird eine

$$u^2 = (u-b) \cdot (u-b+1) + 2 \cdot P - u \quad (4)$$

$$b = u + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot P} \quad (5)$$

$$a = b^2 \cdot \left[\frac{u}{2} - \frac{b}{3}\right] \quad (6)$$

$$b = \frac{P}{u} \quad (7)$$

$$a = \frac{b^2 \cdot u}{2} = \frac{P^2}{2u} \quad (8)$$

3.2 Numerierungsschema

Die Prinzipien der Numerierung der neuen Methode werden zunächst an einem Bildstreifen erläutert (Abb.11). Die Knoten werden dabei in Numerierungsstufen eingeteilt, wobei zu jeder Stufe ein Bild und die neu in diesem Bild zum Block hinzukommenden Punkte gehören. Innerhalb einer Stufe stehen die Punkte vor dem Bild, da das Bild den höchsten Verknüpfungsgrad hat. Die Punkte einer Stufe werden nach aufsteigendem maximalen Bildindex geordnet. Die Punkte 4-6 in Abbildung 11 treten noch in Bild C auf und stehen daher hinter den Punkten 1-3, die nur noch in Bild B angemessen sind. Diese simple Sortiermethode erzeugt für Bildstreifen ein fast minimales Profil.

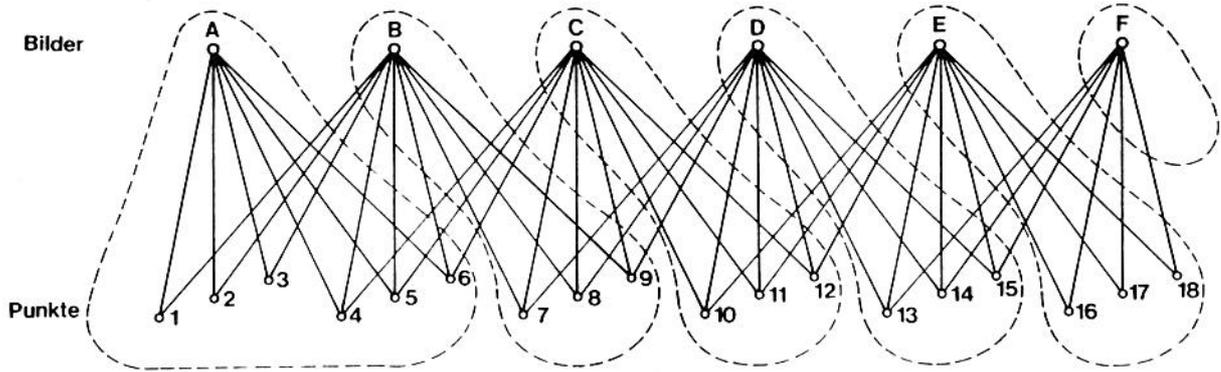


Abb.11: Numerierungsstufen eines Bildstreifens

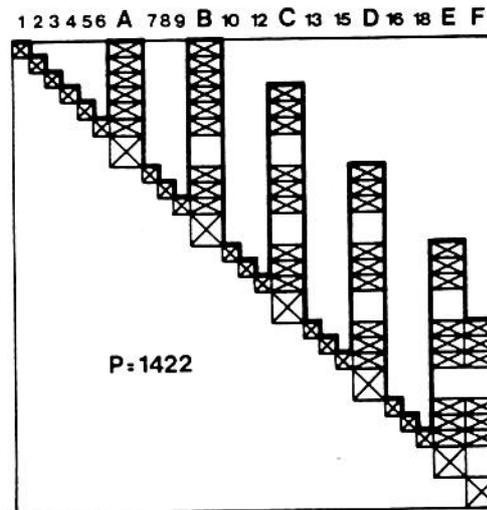


Abb.12: Matrizenstruktur für den Bildstreifen

Für Bündelblöcke werden die Bilder zunächst in gewohnter Weise quer zur größten Blockausdehnung durchnummeriert. Auf diese Weise wird das Profil klein gehalten. Abbildung 13 zeigt die Matrizenstruktur für einen Bildverband mit 3x7 Bildern und 20 % Querüberdeckung. Liegt keine regelmäßige Bildanordnung vor, so sollen miteinander verknüpfte Bilder in der Matrix möglichst nahe beieinander stehen. Übersichtsaufnahmen stehen dabei hinter Detailaufnahmen.

Für zusätzliche geodätische Beobachtungen sind keine besonderen Maßnahmen vorgesehen. Da normalerweise das Prinzip der Nachbarschaft bei den Messungen gewahrt wird, kann man darauf vertrauen, daß diese Messungen das Profil nicht übermäßig vergrößern. Bisherige praktische Anwendungen zeigen die Richtigkeit dieser Annahme. Netzpunkte, die in keinem Bild angemessen sind, werden nahe bei den Punkten in die Matrix eingefügt, mit denen sie verknüpft sind. Beispiele praktischer Anwendungen stehen in /Kruck 1984/.

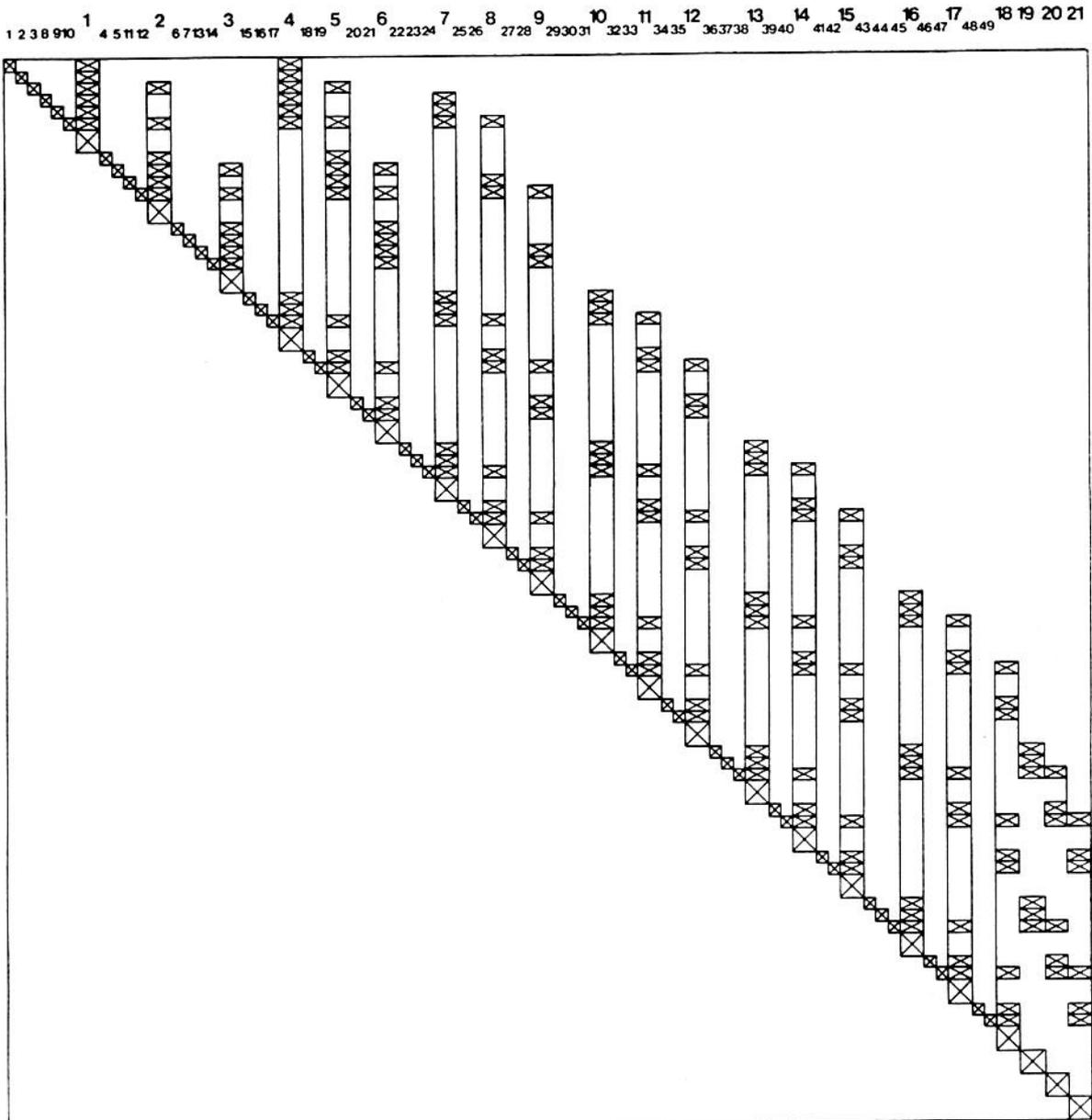


Abb.13: Matrizenstruktur für einen Bildverband mit 3x7 Bildern,
20 % Quer- und 60 % Längsüberdeckung

3.3 Fill-In

Am Beispiel eines kleinen Graphen wird nun gezeigt, daß das Fill-In bei der neuen Methode kleiner ist, als bei herkömmlicher Numerierung der Unbekannten. In den Abbildungen 14-16 stellen die mit großen Buchstaben bezeichneten Knoten die Bilder dar und die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Knoten die Punkte. Die entstandene Matrizenstruktur in Abb.14 entspricht der photogrammetrischer Blöcke. Da die Punkte zuerst reduziert werden, entstehen 7 neue Graphen zwischen den Bildern und erzeugen in N_{22} die typische Bandstruktur. Der zusätzliche Graph d-b in Abb.15 stellt eine geodätische Messung dar und erzeugt eine zusätzliche Verbindung in N_{11} . Bei der Faktorisierung entstehen jetzt 12 neue Graphen, die die Punkte mit den Bildern bzw. die Bilder untereinander verbinden. Ordnet man die Matrix nach der neu entwickelten Methode (Abb.16), so entstehen nur 9 neue Graphen. Es fallen genau die drei Graphen aus, die vorher die Teilmatrix N_{22} aufgefüllt haben, nämlich A-D, A-E und B-E.

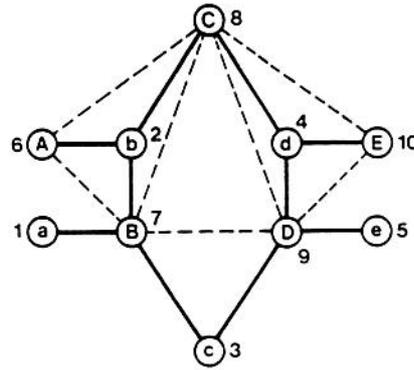
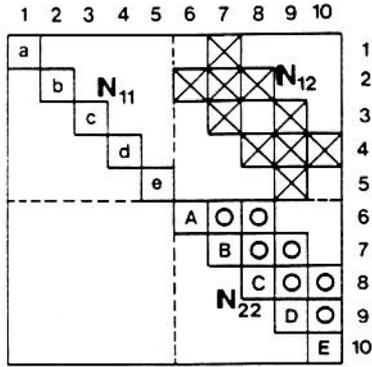


Abb.14:

Kleiner Graph mit Numerierung zur Erzeugung einer Matrizenstruktur, wie sie in Bündelausgleichungen üblich ist. Fill-In: 7 Elemente

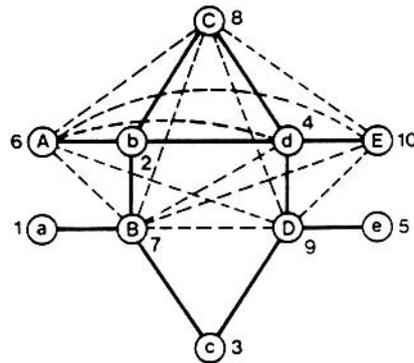
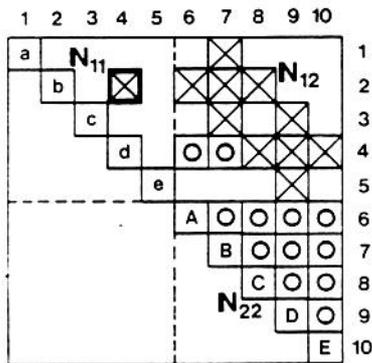


Abb.15:

Zusätzlicher Graph b-3 erzeugt die Struktur einer zusätzlichen geodätischen Beobachtung. Fill-In: 12 Elemente

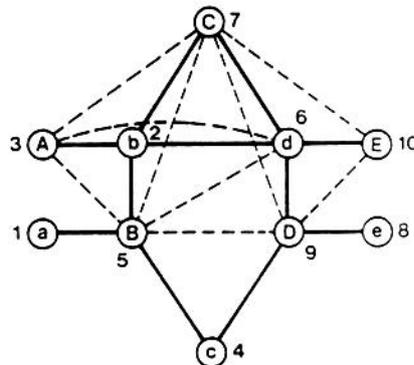
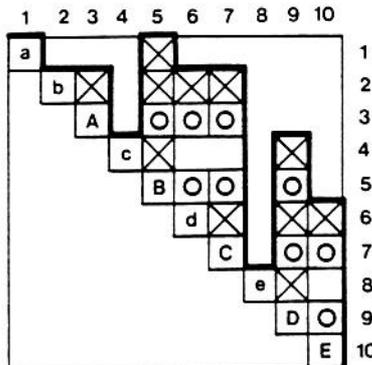


Abb.16:

Nach der neuen Methode umsortierte Matrix. Fill-In: 9 Elemente

- Elemente der Matrix N
- Bei der Zerlegung neu entstandene Elemente (Fill-In)

Durch die neue Sortierung liegen diese Elemente außerhalb des Profils. Es kann also festgestellt werden, daß bei der neuen Methode geodätische Messungen keinen Einfluß mehr auf die Anzahl der Elemente in der (auf die Gesamtmatrix verteilte) Teilmatrix der Bildunbekannten ausüben können. Andererseits entstehen in den meisten Fällen einige zusätzliche Verknüpfungen zwischen Punkten und Bildern, die jedoch nach bisher vorliegenden Erfahrungen den Gewinn bei weitem nicht aufzehren.

4. Weitere Eigenschaften der neuen Methode

Besonders wichtig ist die Frage, wie sich der Rechenaufwand bei einer Erhöhung der Anzahl der Punkte, also bei einer Verstärkung der Verknüpfung verändert. Die Formel (6) bzw. (8) kann darüber keinen Aufschluß geben, solange die Änderung der Band-

breite nicht bekannt ist. Empirische Untersuchungen an sehr verschieden strukturierten Blöcken unterschiedlicher Größe haben gezeigt, daß die mittlere Bandbreite b bei einer Erhöhung der Punktzahl im Block im Mittel konstant bleibt, so daß der Rechenaufwand nur linear anwächst. Dies ist besonders wichtig, da photogrammetrische Verfahren besonders dann gern eingesetzt werden, wenn viele Punkte pro Flächeneinheit zu bestimmen sind.

Ein weiterer Vorzug dieser Methode ist darin zu sehen, daß keine Bandbreitenbegrenzungen bestehen, wie bei der rekursiven Partitionierung. Bei sehr großen Bandbreiten wird jedoch die Anzahl der Spalten kleiner, die gleichzeitig im Kernspeicher stehen können. Dadurch steigt der Ein- und Ausgabearbeit und somit die Verweilzeit im Rechner.

Für die Untersuchung der Eigenschaften von Netzen, für Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsanalysen sowie zur Suche nach Datenfehlern und zur Überprüfung der Gewichtsansätze ist die Berechnung der Diagonalelemente der Matrizen Q_{XX} und Q_{VV} wichtig. Die Profilspeichertechnik gestattet es, die Inversion von N nach $C \cdot N^{-1} = C^{-1T}$ auf diejenigen Elemente von N^{-1} zu begrenzen, die in der Hülle von N liegen (Profilinverse). Der dafür erforderliche Rechenzeitbedarf ist etwa 2,5 bis 3 mal größer als für die Faktorisierung. Diese Profilverse reicht aus, die Diagonalelemente von Q_{VV} nach (9) zu

$$(Q_{VV})_{ii} = (Q_{\ell\ell})_{ii} - a_i \cdot N^{-1} a_i^T \quad (9)$$

berechnen, wobei a_i ein Zeilenvektor der Modellmatrix A ist.

5. Praktische Vergleiche und Tests mit Vektorrechnern

Die neue Methode wird im Programm **BINGO** (Bündelausgleichung für Ingenieurobjekte) benutzt. Praktische Vergleichsrechnungen mit dem Programm **BLUHE**, das Hauptrechenprogramm des Programmpakets **BLUH** (Blockausgleichungsprogramm der Universität Hannover) /K. Jacobsen 1980/ ist und die Normalgleichung mit der Rekursiven Partitionierung löst, zeigen bei Verarbeitung auf der **CYBER 76** des Regionalen Rechenzentrums für Niedersachsen keine größeren Laufzeitunterschiede. Die ausgewählten Testbeispiele unterscheiden sich hinsichtlich der Struktur und der Größe der Blöcke erheblich. Es handelt sich dabei jedoch ausschließlich um Blöcke ohne zusätzliche geodätische Beobachtungen, da eine Simultanausgleichung mit **BLUHE** nicht möglich ist. Beim größten Block (6 800 Unbekannte) war **BINGO** um 17 % schneller, während sich beim am stärksten verknüpften Block (2 560 Unbekannte) ein Rechenzeitvorteil von 22 % für **BLUHE** ergab. Damit ist die Leistungsfähigkeit der neuen Methode auch für herkömmliche Blockausgleichungen nachgewiesen.

Praktische Testrechnungen mit der neuen Methode auf Rechnern mit besonderen Hardware-Einrichtungen zur schnellen Verarbeitung von Vektoren und Matrizen (Vektorrechner) haben gezeigt, daß hier durch den Einsatz der Vektorprozessoren beachtliche Steigerungen der Rechenleistung möglich sind. Bei einer Faktorisierung einer Matrix mit nur 400 Unbekannten und einer mittleren Bandbreite $b = 72$ auf dem **HP 1000-F** Rechner des Instituts für Photogrammetrie und Ingenieurvermessungen der Universität Hannover verkürzt der Einsatz des Vektor-Prozessors die Rechenzeit von 145 sec. auf 22,6 sec., also um den Faktor 6,4. In größeren Matrizen mit längeren Vektoren sind Leistungssteigerungen bis zum Faktor 9 zu erwarten. Ein Programmtest auf einem **CRAY-1**-Rechner ergab bei skalarer Verarbeitung eine Gesamtlaufzeit des Programms von 57 sec. und bei vektorierter Verarbeitung eine Zeit von 13 sec. Derartig hohe Leistungssteigerungen sind bei Einsatz der rekursiven Partitionierung nicht zu erwarten, da die Rechnungen häufiger für Indexrechnungen unterbrochen werden müssen. Da die technologische Zukunft auf dem Gebiet der Computerentwicklung den Vektorrechnern gehört, wird durch die neue Methode die Ausgleichung extrem umfangreicher Blöcke möglich sein.

Literatur

- BROWN, D.C.: A Solution to the General Problem of Multiple Station Analytical Stereotriangulation. Patric Air Force Base, Florida 1958. (RCA-MTP Data Reduction Technical Report No.43).
- GEORGE, A.: Solution of Linear Systems of Equations: Direct Methods for Finite Element Problems. Beitrag in: Sparse Matrix Techniques. Hg.: A.Dold und B.Eckmann. Springer-Verlag 1977.
- HARARY, F.: Graphentheorie. Oldenbourg Verlag. München 1974.
- HELL, G.: Terrestrische Bildtriangulation mit Berücksichtigung zusätzlicher Beobachtungen. DGK Reihe C, Nr.252, München 1979.
- JACOBSEN, K.: Programmgesteuerte Auswahl zusätzlicher Parameter. BuL 6, 1982, S.213-217.
- JENNINGS, A.: A Compact Storage Scheme for the Solution of Simultaneous Equations. Computer Journal 9, S.281-285, 1966.
- KRUCK, E.: Optimierte Numerierung der Unbekannten in photogrammetrischen Blöcken. BuL 6/1982, S.218.
- KRUCK, E.: Lösung großer Gleichungssysteme für photogrammetrische Blockausgleichungen mit erweitertem funktionalen Modell. WA TUH Nr.128, Hannover 1983.
- KRUCK, E.: BINGO: Ein Bündelprogramm zur Simultanausgleichung für Ingenieur-anwendungen - Möglichkeiten und praktische Ergebnisse. Presented Paper. ISPRS, Commission V. Rio de Janeiro 1984.
- LE MENESTREL, J.: Compensation du Réseau Géodétique français de premier ordre. Bulletin Geodesique No.94, 1969.
- SCHMITT, G.: Speichertechnische und numerische Probleme bei der Auflösung großer geodätischer Normalgleichungssysteme. DGK Reihe C, Nr.195, München 1973.
- SCHWARZ, H.R.: Methode der finiten Elemente. Teuber Studienbücher Mathematik, Band 47. Stuttgart 1980
- WESTER-EBBINGHAUS, W.: Ein allgemein formuliertes Konzept zur Bildtriangulation mit gemeinsamer Ausgleichung photogrammetrischer und geodätischer Beobachtungen. Presented Paper, ISPRS Commission III. Rio de Janeiro 1984.
- WONG, K. u. ELPHINGSTONE, G.: Aerotriangulation by SAPGO. Phot.Eng. 38, S.779-790, 1972.

Abkürzungen

BuL	Bildmessung und Luftbildwesen
DGK	Deutsche Geodätische Kommission
Phot.Eng.	Photogrammetric Engineering
WA TUH	Wissenschaftliche Arbeiten der Universität Hannover