

Balanced Least Squares Adjustment for Relative Orientation

Dr.-Ing. Erwin Kruck

Abstract

The influence of faulty measurements on the result of parameter estimation is strongly depending on the chosen method. The preferred method of least squares can falsify the result significantly and aggravate the identification of faulty measurements. Now a new calculation method will be shown, which reduces these disadvantages by varying the weights for searching rough mistakes. The high quality of the practical result of this method will be demonstrated. Furthermore a comparison between this and other methods will be drawn.

For varying the weights the redundancy parts must be determined as influence factors. Until now the inverse of the normal equation matrix has been used for this step. Now there is a possibility of calculation demonstrated which avoids the complete inversion in every iteration.

1. Einführung

Die Methode der kleinsten Quadrate wird immer wieder kritisiert, weil Datenfehler ein Ergebnis so stark verfälschen können, dass fehlerhafte Messungen nicht mehr zu identifizieren sind. Dies gilt insbesondere für dreidimensionale Ausgleichungen. Nachfolgend wird beispielhaft auf die relative Orientierung Bezug genommen. Dort kann selbst bei vielen Punkten und daraus resultierenden hohen Redundanzen bereits ein einziger grober Fehler einen sehr starken Zwang auf die Ausgleichung ausüben. In vielen Fällen wird dann ein völlig falsches Resultat erzielt und die fehlerhafte Messung ist auch mit dem Data Snooping nach Baarda nicht mehr aufzudecken. Ein praktisches Beispiel in Kapitel 6 belegt diesen Effekt.

Der Grund ist meistens ein zu hoher Einfluss gerade solcher grob fehlerhaften Messungen. Durch den Messfehler ist die Lage des fehlerhaften Punktes dann so stark verändert, dass der Punkt aufgrund der Geometrie zu einem Hebelpunkt wird und die Orientierung total verfälscht. Die Redundanzanteile solcher Messungen belegen dies, sie tendieren zum Wert Null.

2. Balancierte Ausgleichung

Es wird eine neu entwickelte Methode der begrenzt balancierten Ausgleichung vorgestellt, die das genannte Problem dadurch beseitigt, dass für die Fehlersuche der Einfluss aller Beobachtungen auf das Ergebnis egalisiert wird. Die Redundanzanteile aller Beobachtungen werden aneinander angeglichen und eventuellen Hebelpunkten wird so der starke Einfluss genommen. Dieser Gedanke ist zunächst nicht neu, jedoch fehlen bisher praktisch anwendbare Formeln zur Variation der Gewichte.

Es gelte das funktionale Modell:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

mit

- \mathbf{l} : Vektor der Beobachtungen
- \mathbf{v} : Vektor der Residuen
- \mathbf{A} : Modellmatrix (Designmatrix)
- \mathbf{x} : Vektor der Systemunbekannten
(zu schätzende Parameter)

Unter Annahme einer Gewichtsmatrix P , die das stochastische Verhalten der Beobachtungen

beschreibt, berechnet sich die Lösung \mathbf{x} aus der Normalgleichung:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (2)$$

oder

$$\mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{n} \quad (3)$$

mit

\mathbf{N} : Normalgleichungsmatrix
 \mathbf{n} : rechte Seite der Normalgleichung

Auf die Lösung dieser Gleichung wird später noch eingegangen.

Im überbestimmten System (1) trägt jede einzelne Beobachtung einen bestimmten Anteil zur Überbestimmung bei. Dieser Redundanzanteil r entscheidet darüber, welcher Anteil einer Beobachtung "überschüssig" ist und welcher Anteil Einfluss auf die zu schätzenden Parameter nimmt. Je größer r ist, um so größer ist der Einfluss auf die Verbesserungen v und um so kleiner der Einfluss auf die zu schätzenden Parameter x . Geht der Redundanzanteil gegen Null, so ist eine Beobachtung nicht mehr kontrollierbar. Ein eventueller Fehler geht vollständig in die zu schätzenden Parameter ein. Auch Fehlersuchmethoden wie z. B. das Data Snooping /Baarda 1968/ liefern dann keine brauchbaren Ergebnisse mehr.

Die Redundanzanteile der Beobachtungen sind von der Geometrie und von den Beobachtungsgewichten p abhängig:

$$r = \text{diag}\left\{\left(\mathbf{Q}_{\parallel} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T\right) \mathbf{P}_{\parallel}\right\} \quad (4)$$

mit

$$\mathbf{Q}_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}^{-1} \quad (5)$$

Durch gezielte Variation der Gewichtsmatrix \mathbf{P}_{\parallel} werden die Redundanzanteile gemäß Kapitel 3 so verändert werden, dass sie alle einen einheitlichen mittleren Wert annehmen von:

$$r_m = \frac{n - u}{n} \quad (6)$$

mit

n : Anzahl der Beobachtungen
 u : Anzahl der unbekannt Parameter

Anschließend ist die Beobachtung mit der größten Verbesserung am ehesten als fehlerhaft zu bewerten.

3. Variation der Gewichte

Um nun diese Variation der Gewichte durchzuführen, ist zunächst ein direkter Zusammenhang zwischen den Gewichten und den Redundanzanteilen herzustellen. Da diese Abhängigkeit sehr komplex ist, wurden hier zunächst verschiedenartigen Datensätze empirisch untersucht. Das Gewicht jeweils einer Beobachtung wurde systematisch geändert und die Auswirkung auf die zugehörige Redundanz ermittelt. Dabei zeigte sich ein relativ einfacher Zusammenhang: Trotz unterschiedlicher Geometrie und Gesamtredundanz der Blöcke erhält man gleichartige Kurven. Das Ergebnis ist beispielhaft in Abbildung 1 dargestellt.

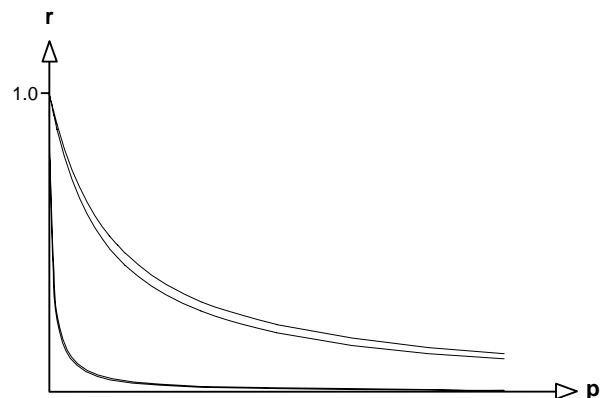


Abb. 1 Änderung der Redundanz bei Variation des Gewichts

Als Rechtswert ist das Gewicht aufgetragen, als Hochwert die Redundanz. Bei kleinen Redundanz oder bei schwacher Geometrie erhält man die stark gekrümmten unteren Kurven, bei höherer Redundanz oder bei stabiler Geometrie die flacheren oberen Kurven. Die unteren Kurven zeigen, dass eine Gewichtsänderung lange ohne Auswirkung bleiben kann, dann aber ändert sich die Redundanz sprunghaft und somit auch der Einfluss auf die Ausgleichung. Bei fehlerhaften Beobachtungen ändert sich daraufhin die Geometrie deutlich. Demzufolge ändern sich auch die Redundanzen der Beobachtungen und gerade fehlerhafte Beobachtungen erhalten eine neue Redundanzkurve.

Will man diese Redundanzkurven mit einfachen Funktionen darstellen, so muss die Approximation für die unteren Kurven daher besonders gut sein. Abbildung 2 zeigt eine Kurvenschar, die dieser Anforderung gerecht wird. Die untere Kurve ist mit denen aus Abbildung 1 praktisch deckungsgleich, die oberen Kurven ergeben eine akzeptable Annäherung. Sicher lassen sich noch bessere Approximationen finden, aber es wird noch gezeigt, daß dies für die Berechnungen unerheblich ist.

Die Kurvenschar ist durch folgende Funktion dargestellt:

$$r = 1 - c \cdot \operatorname{atan}(k \cdot p) \quad (7)$$

Darin sind

k : die Kurvennummer
 c : eine Konstante

Um nun die Redundanz r_m gemäß (6) zu erreichen, wird das Gewicht entsprechend verändert, d.h., die Beobachtung wird auf der Kurve (7) ein Stück verschoben (siehe Abbildung 2).

(7) aufgelöst nach p :

$$p = \tan\left(\frac{1-r}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{k}\right) \quad (8)$$

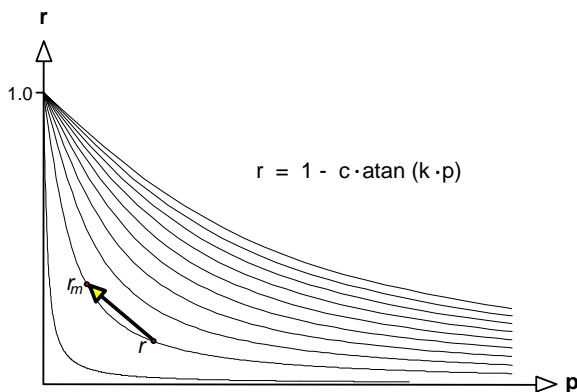


Abb. 2 Approximation der Redundanzkurven

Gibt man den aktuellen Werten p und r einer Beobachtung l_i den Index i , und dem zum mittleren Redundanzanteil r_m gesuchten neuen Gewicht p den Index m bei, so gilt das Verhältnis:

$$\frac{p_m}{p_i} = \frac{\tan\left(\frac{1-r_m}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{k}\right)}{\tan\left(\frac{1-r_i}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{k}\right)}$$

und damit:

$$p_m = p_i \cdot \frac{\tan\left(\frac{1-r_m}{c}\right)}{\tan\left(\frac{1-r_i}{c}\right)} \quad (9)$$

Ohne die Kurvennummer k zu kennen, kann nun das neue Gewicht für eine Beobachtung berechnet und die Ausgleichung neu gestartet werden.

Da sich durch die veränderten Gewichte die Geometrie ändert, sind einige Iterationen erforder-

lich, um das endgültige Ergebnis zu erreichen. Dies gilt insbesondere dann, wenn grobe Fehler in den Daten das Ergebnis stark beeinflussen.

4. Begrenzung der Balancierung

Gerade beim Vorliegen grober Datenfehler, die das Ergebnis stark verfälschen, kann es während der Iterationen zu unerwünschten Schwingeffekten kommen. Solche Beobachtungen üben eine Art Hebelwirkung auf das Ergebnis aus. Der Verlauf Ihrer Redundanzkurven entspricht dem der unteren Kurven in Abbildung 1.

Dieser Schwingeffekt sei am Beispiel der relativen Orientierung näher erläutert: Eine falsche Beobachtung der Bildkoordinaten eines Punktes hat dazu geführt, dass die zugehörigen Punktkoordinaten weitab von den übrigen Beobachtungen liegen. Der Einfluss auf das Ergebnis ist durch diese Geometrie sehr hoch und der Redundanzanteil der Beobachtung sehr klein (z.B. $r = 0.001$). Durch die Reduzierung des Gewichts nähert sich der Punkt wieder seiner korrekten Lage in der Nähe der anderen Punkte. Dadurch verliert der Punkt seine Hebelwirkung und hat deutlich andere Koeffizienten in der Matrix A sowie eine höhere Redundanz. Daher müsste das Gewicht wieder heraufgesetzt werden, eine Konvergenz wäre kaum zu erreichen.

Aus diesem Grunde wird die Balancierung zweifach begrenzt:

1. Es wird nicht verlangt, dass alle Redundanzanteile r_i streng den Wert r_m annehmen, sondern es wird eine kleine Bandbreite toleriert, die von der Gesamtredundanz der Ausgleichung abhängig ist.
2. Die nach (9) berechnete Gewichtsänderung wird nur zum Teil berücksichtigt. Abhängig von der Blockgeometrie und der Gesamtredundanz wird die tatsächliche Gewichtsänderung begrenzt.

Mit diesen Begrenzungen wurden bei der relativen Orientierung gute Erfahrungen gemacht. Schwingungen bei der Gleichungslösung können fast vollständig vermieden werden. Verbleibende kleine Schwingungen werden durch Analyse der Sequenz der Gleichungslösungen herausgefiltert und beseitigt. Vor einer Veröffentlichung sollen diese Formeln jedoch weiter untersucht werden.

Wegen dieser Begrenzung wird klar, dass - wie bereits in Kapitel 3 ausgeführt - die Redundanzkurven nicht ganz fein angenähert sein müssen, da ohnehin nicht der volle Änderungsbetrag der Gewichte angesetzt wird und nur die Beobachtungen wirklich kritisch sind, deren Redundanzkurven stark gekrümmt sind.

Point	X_M	Y_M	Z_M	Parallax	Weight	Redund.
1000	69.26	3.79	-152.88	-16.4	1.00	0.909
1001	92.61	-8.58	-161.17	-4.4	1.00	0.925
1003	56.11	58.27	-142.93	-4.9	1.00	0.906
1004	100.69	48.26	-161.62	-1.2	1.00	0.841
1006	38.55	-48.16	-143.16	-29.1	1.00	0.913
9303	2.40	-68.49	-134.00	8.3	1.00	0.345
9304	11.62	-19.77	-134.29	36.3	1.00	0.753
9305	21.33	34.21	-133.97	85.2	1.00	0.725
9317	34.37	-74.69	-142.52	-36.0	1.00	0.837
9318	42.72	-25.67	-143.10	-25.6	1.00	0.904
9319	51.26	28.72	-143.26	-7.7	1.00	0.865
9320	58.68	85.88	-139.04	-25.2	1.00	0.960
9336	29.20	-40.67	-77.64	8.6	1.00	0.034
9337	65.16	-29.94	-152.22	-32.0	1.00	0.926
9338	73.54	24.64	-152.72	-18.6	1.00	0.909
9339	82.12	84.25	-151.49	-27.7	1.00	0.867
9356	79.81	-83.79	-159.39	-31.3	1.00	0.840
9357	88.90	-34.43	-160.60	-12.4	1.00	0.925
9358	97.16	20.20	-161.35	0.4	1.00	0.902
9359	105.57	80.89	-161.20	-4.9	1.00	0.643
9558	105.36	-37.62	-168.65	10.7	1.00	0.911
9559	98.12	-87.76	-167.88	-1.2	1.00	0.792
9561	113.78	17.01	-169.41	26.5	1.00	0.859
9571	127.48	-41.68	-173.12	33.4	1.00	0.853
9579	129.33	-93.91	-176.19	37.4	1.00	0.656

Tab. 1 Ergebnis einer relativen Orientierung mit einem fehlerhaften Punkt

Point	X_M	Y_M	Z_M	Parallax	Weight	Redund.
1000	69.01	3.78	-152.29	-1.1	5.093	0.84
1001	92.09	-8.53	-160.26	0.4	4.623	0.86
1003	56.91	59.11	-144.97	8.8	3.638	0.82
1004	100.97	48.40	-162.08	-4.5	1.870	0.79
1006	38.07	-47.54	-141.32	-1.6	1.711	0.73
9303	2.36	-67.18	-131.45	8.5	0.111	0.79
9304	11.50	-19.57	-132.98	15.5	0.295	0.75
9305	21.44	34.43	-134.82	34.1	0.406	0.73
9317	33.81	-73.44	-140.13	-0.1	0.601	0.75
9318	42.35	-25.44	-141.80	-2.6	2.500	0.80
9319	51.42	28.81	-143.70	5.0	2.500	0.82
9320	60.86	89.06	-144.17	10.0	8.376	0.82
9336	28.91	-40.14	-76.60	208.1	0.008	0.78
9337	64.59	-29.67	-150.84	-8.4	4.965	0.78
9338	73.55	24.64	-152.71	-3.8	4.962	0.84
9339	83.46	85.63	-153.95	2.0	1.572	0.82
9356	78.68	-82.58	-157.10	-4.4	1.000	0.81
9357	88.12	-34.12	-159.19	-0.7	4.490	0.80
9358	97.00	20.17	-161.08	0.0	3.191	0.85
9359	106.56	81.65	-162.72	-4.0	0.647	0.79
9558	104.46	-37.30	-167.22	1.6	1.942	0.85
9559	96.80	-86.57	-165.61	6.0	1.000	0.82
9561	113.53	16.97	-169.05	2.2	1.950	0.77
9571	126.49	-41.36	-171.79	7.1	1.000	0.81
9579	127.79	-92.81	-174.11	17.3	0.482	0.81

Tab. 2 Ergebnis der Orientierung mit balancierter Ausgleichung

5. Lösung der Normalgleichung und Berechnung der Redundanzanteile

Auch wenn bei der relativen Orientierung nur sehr kleine Gleichungssysteme nach (3) zu lösen sind, sollen rechenzeitsparende Algorithmen eingesetzt werden. Ein Einsatz von Sparsetechniken kommt hier nicht in Betracht, da die Matrizen voll besetzt sind. Zunächst wird daher Gleichung (3) nach Cholesky faktorisiert, d.h., die symmetrische Matrix \mathbf{N} wird in eine Dreiecksmatrix \mathbf{C} zerlegt. Obwohl die Lösung altbekannt ist, wird sie hier der Vollständigkeit halber aufgeführt.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{N} \quad (10)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{n} \quad (11)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{g} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{g} = \mathbf{n} \quad (13)$$

(10) eingesetzt in (3) ergibt (11). $\mathbf{C} \mathbf{x}$ wird durch \mathbf{g} substituiert (12). Eingesetzt in (11) entsteht (13). Nun können \mathbf{g} aus 13 und anschließend \mathbf{x} aus (12) berechnet werden.

Anschließend sind die Redundanzanteile entsprechend (4) zu bestimmen, um die Gewichte entsprechend neu setzen zu können. Für diesen Schritt wird hier ein Lösungsweg vorgeschlagen, der aus der Literatur nicht bekannt ist:

Dazu wird zunächst (10) in (4) eingesetzt:

$$r = \text{diag} \left\{ \left(\mathbf{Q}_{\parallel} - \mathbf{A} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{A}^T \right) \mathbf{P}_{\parallel} \right\} \quad (14)$$

Von diesem Ausdruck wird nur die Diagonale benötigt. Da \mathbf{Q}_{\parallel} und \mathbf{P}_{\parallel} nur Diagonalmatrizen sind, wird auch von dem inneren Produkt aus \mathbf{A} und \mathbf{C} nur die Diagonale benötigt. Es wird umgestellt:

$$r = \text{diag} \left\{ \left(\mathbf{Q}_{\parallel} - \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \right) \mathbf{P}_{\parallel} \right\} \quad (15)$$

$$r = \text{diag} \left\{ \left(\mathbf{Q}_{\parallel} - \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1})^T \right) \mathbf{P}_{\parallel} \right\} \quad (16)$$

Die Inverse der Dreiecksmatrix \mathbf{C} ist deutlich schneller zu berechnen als die komplette Inverse von \mathbf{N} . Weiter muss nur noch das Produkt $\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}$ zeilenweise bestimmt, zeilenweise quadriert und mit den zugehörigen Diagonalelementen von \mathbf{Q} und \mathbf{P} kombiniert werden. Der erforderliche Rechenaufwand nach (16) ist somit deutlich geringer als eine Berechnung nach (4).

7. References

Baarda, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Neth. Geod. Comm., Nr. 5, 1968.

Kampmann, G. and Krause, B.: Equivalence of L_p -Norm Minimization and Maximum-Likelihood Method. ZfV Zeitschrift für Vermessungswesen 1995. In Druck.

Van Den Hout, C.M.A., and Stefanovic, P.: Efficient analytical relative Orientation. Presented paper, ISP Commission III, Helsinki 1976.

Da aus \mathbf{C}^{-1} auch die Diagonalelemente von \mathbf{N}^{-1} schnell gerechnet werden können, ist dieser Rechenweg nach Ansicht des Verfassers für viele Anwendungen interessant.

6. Praktische Ergebnisse

Praktische Erfahrungen beim Einsatz dieses Verfahrens in der relativen Orientierung zeigen, dass grobe Fehler gut automatisch gefunden und beseitigt werden können. Die Tabellen 1 und 2 belegen dies beispielhaft:

Die Ergebnisse in Tabelle 1 zeigen das Resultat der üblichen Kleinste-Quadrate-Ausgleichung der Modellbildung auf der Basis der Komplanaritätsbedingungen. Der Fehler in Punkt 9336 ist nicht an der Parallaxe zu erkennen. Auch Baarda's Data Snooping läßt eine Identifizierung nicht zu, da nach Baarda's Methode der Punkt 9305 eine normierte Verbesserung von $w = 16$ erhält, für Punkt 9336 dagegen gilt $w = 8$. Damit würde man zuerst fälschlich einen guten Punkt eliminieren. Auch der Einsatz der dänischen Methode, bei der die Gewichte anhand der Verbesserungen variiert werden, wird hier nicht zum Erfolg führen. Tabelle 2 enthält das Ergebnis der balancierten Ausgleichung. Der Fehler in Punkt 9336 zeigt sich sehr deutlich und kann eliminiert werden.

Das hier gezeigte Beispiel ist durchaus typisch für die relative Orientierung. Selbstverständlich gibt es auch viele Fälle, in denen bereits die Verbesserung einen falschen Punkt sichtbar werden läßt, aber sobald größere y -Parallaxen auftreten, entsteht oft die im Beispiel gezeigte Situation.

Inzwischen ist der Ansatz der begrenzt balancierten Ausgleichung gut erprobt. Er wird im Programm RELAX-B eingesetzt, das zum Bündelprogramm BINGO gehört und dort automatisch die Näherungsorientierungen der Bilder rechnet. Im Vergleich zum vorher benutzten linearen Ansatz von Van Den Hout und Stefanovic /1976/ werden mit dieser Methode insgesamt deutlich bessere Resultate erzielt.

Andere Ansätze mit der balancierten Ausgleichung werden sicher vorhandene Fehler genau so deutlich aufdecken. Ein direkter Vergleich ist leider nicht möglich, da diese Ansätze noch nicht hinreichend dokumentiert sind /Kampmann 1995/.